Universidad Simón Bolívar.
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

19 de junio de 2007.
Matemáticas III (MA–1116)

2^{do} Parcial. (30 %)
TIPO C1

Justifique todas sus respuestas.

1. Sea r la recta representada por
$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = z+1.$$

   a) (3 puntos) Halle la ecuación del plano π que pasa por el origen y es perpendicular a r.
   Solución:
   El vector director de la recta r es $(2,3,1)$ el cual será el vector normal del plano π, como este plano pasa por el origen, su ecuación es:
$$2x+3y+z=0.$$

   b) (4 puntos) Si A es el punto intersección de la recta r con el plano π, halle la ecuación del plano que pasa por el origen, pasa por A y es paralelo al vector $\vec{u}=(1,2,-1)$.
   Solución:
   El punto A de intersección se obtiene resolviendo el sistema
$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+3y+z &=& 0\\ x &=& 1+2t\\ y &=& 2+3t\\ z &=& -1+t \end{array}\right. \Rightarrow 2(1+2t)+3(2+3t)+(-1+t)=0 \Rightarrow 7+14t=0 \Rightarrow t=-\frac{1}{2} \Rightarrow A=(0,\frac{1}{2},-\frac{3}{2})$$
   Dos vectores que están en este plano son $\vec{v}=2\ \overrightarrow{0A}=(0,1,-3)$ y $\vec{u}=(1,2,-1)$, tomamos el factor 2 para tener coordenadas enteras. Un vector normal será el producto cruz,
$$\vec{v}\times\vec{u} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k}\\ 0 & 1 & -3\\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \hat{\imath}(-1+6)-\hat{\jmath}(0+3)+\hat{k}(0-1)=(5,-3,-1),$$
   de donde obtenemos la ecuación $5x-3y-z=0$.
   En el tipo **C2** la recta r es $3x+2y+z=0$, el punto de intersección es $A=(1/2,0,-3/2)$, $\vec{v}=2\ \overrightarrow{0A}$ y $\vec{v}\times\vec{u}=(-3,5,-1)$, el plano de la parte *b*) es $-3x+5y-z=0$.

2. Sea $\mathrm{M}_{2\times 2}$ el espacio vectorial formado por el conjunto de todas las matrices reales 2×2, con las operaciones usuales de suma y multiplicación por escalares reales. Considere el conjunto:
$$H=\left\{A\in \mathrm{M}_{2\times 2}:\ A\begin{pmatrix}1\\ a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\right\}$$

   a) (3 puntos) ¿ Es H un subespacio de $\mathrm{M}_{2\times 2}$?
   Solución:
   i) Claramente la matriz cero está en H, por lo cual $H\neq\emptyset$.
   ii) Sean A y $B\in H$ entonces $A\begin{pmatrix}1\\ a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$ y $B\begin{pmatrix}1\\ a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$ Por lo cual,
$$(A+B)\begin{pmatrix}1\\ a\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}1\\ a\end{pmatrix}+B\begin{pmatrix}1\\ a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix},$$
   de donde se deduce que, $A+B\in H$.
   iii) Si α es un escalar,
$$(\alpha A)\begin{pmatrix}1\\ a\end{pmatrix}=\alpha\cdot A\begin{pmatrix}1\\ a\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}.$$

b) (3 puntos) Pruebe que $W = \left\{ \begin{pmatrix} -a & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -a & 1 \end{pmatrix} \right\}$ es un subconjunto de H.

Solución:

c) (3 puntos) ¿ Es W linealmente independiente ?

Solución:

Supongamos que existen escalares x y y tales que,

$$x \begin{pmatrix} -a & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de donde obtenemos el sistema.

$$\begin{aligned} -ax &= 0 \\ x &= 0 \\ -ay &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

por lo cual son linealmente independientes.

3. (6 puntos) Considere el espacio vectorial $\mathbf{P}_2 = \{\, p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 : a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \,\}$, con las operaciones usuales de suma y multiplicación por escalares reales.

¿ Para qué valores de a, b, c se tiene que:

$$a + bx + cx^2 \in \text{gen}\{1 + 2x + x^2 \ , \ 2 + x^2\} \subset \mathbf{P}_2?$$

Solución: Para ello deben exitir escalares α y β tales que:

$$\begin{aligned} a + bx + cx^2 &= \alpha(1 + 2x + x^2) + \beta(2 + x^2) \\ &= (\alpha + 2\beta) + (2\alpha)x + (\alpha + \beta)x^2 \end{aligned}$$

de donde tenemos que el siguiente sistema debe tener solución

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ 2 & 0 & b \\ 1 & 1 & c \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ 0 & -4 & b - 2a \\ 0 & -1 & c - a \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2c - a \\ 0 & 1 & a - c \\ 0 & 0 & 2a + b - 4c \end{array}\right] \Rightarrow 2a + b - 4c = 0.$$

4. *a*) (4 puntos) Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 5 & -1 & -4 \end{pmatrix}$. Encontrar $\text{Adj}(A)$

Solución:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = 12 \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = 20 \quad A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 10$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = 10 \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = -14 \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 16$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 16 \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -4 \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2$$

de donde obtenemos la adjunta

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 12 & 10 & 16 \\ 20 & -14 & -4 \\ 10 & 16 & -2 \end{pmatrix}.$$

En el tipo **C2** la respuesta es la traspuesta.

b) (4 puntos) Sea V un espacio vectorial pruebe que $(-1)\vec{v} = -\vec{v}$ para cada $\vec{v}$ en V.

Solución: Por definición $-\vec{v}$ es el vector que satiface $-\vec{v} + \vec{v} = \vec{0}$, por lo cual basta comprobar que $(-1)\vec{v}$ satisface esta condición, para ello tenemos

$$\begin{aligned} (-1)\vec{v} + \vec{v} &= (-1)\vec{v} + 1\vec{v} \\ &= ((-1) + 1)\vec{v} \\ &= 0\vec{v} = \vec{0}. \end{aligned}$$